SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

P. PLAZZI

INVERSIONE GENERALIZZATA DI OPERATORI LINEARI
E
APPLICAZIONI

3 e 10 FEBBRAIO 1983

I PARTE - TEORIA GENERALE

INTRODUZIONE ALLA I PARTE

La teoria della inversione generalizzata è sorta in connessione con lo studio dei cosiddetti problemi (lineari) 'mal posti': nella forma più semplice, sistemi di equazioni senza esistenza od unicità per le soluzioni.

In molti di questi casi, ha però interesse ricercare 'soluzioni' non classiche, ma provviste di significato pratico: per l'equazione 'mal posta'

$$(0.1) \qquad Ax = b$$

(con A matrice quadrata non invertibile, od addirittura rettangolare) ha interesse ricercare gli x tali che Ax ha 'distanza minima' (se non nulla) da b e, tra questi, gli x con norma minima.

L'inizio di questa teoria viene fatto risalire ad un lavoro di E.H. MOORE del 1920 [6] ma fu solo nel 1955 che, indipendentemente da Moore, R. PENROSE propose una definizione (poi riconosciuta equivalente all'altra) di inversa di una matrice rettangolare, provando successivamente l'importante proprietà di tipo 'variazionale' di cui si è detto: l'inversa generalizzata $A^{\dagger}$ di A dà, per il sistema (0.1) la soluzione $A^{\dagger}b$ 'più vicina' (precisamente, $\|AA^{\dagger}b-b\|$ è minima) e di minima norma.

Questi risultati sono stati generalizzati in molte direzioni ed ora il concetto di inversione secondo Moore e Penrose è visto come caso particolare (grosso modo, quello corrispondente all'ortogonalità) di una più generale struttura: i molti precedenti che si possono ravvisare a questa teoria (provenienti dai campi applicativi più disparati) ed i molti procedimenti euristici che essa ha unificato sono indice di un notevole interesse applicativo.

§ 1. TEORIA ALGEBRICA DELL'INVERSIONE GENERALIZZATA

Proporre il problema dell'inversione generalizzata di un'applicazione lineare $T:X \longrightarrow Y$ (X, Y saranno considerati spazi vettoriali su $\mathbf{R}$ o su $\mathbf{C}$, sebbene la teoria possa, per la parte algebrica, essere svolta altrettanto soddisfacentemente nel caso di campi arbitrari) significa in sostanza trovare un modo per determinare una applicazione lineare $T^{\dagger}: Y \longrightarrow X$ tale che:

α) coincida con T^{-1} se T è biunivoca;

β) in caso contrario, goda di proprietà 'simili' a quelle di T^{-1}.

L'impossibilità di invertire nel modo usuale T è causata o dal fatto che il codominio di T, $R(T)$, è diverso da Y, o dal fatto che $N(T) \neq \{0\}$; nel tentativo di avere proprietà 'simili' a quelle di T^{-1} si può richiedere a $T^{\dagger}$ di essere tale che:

$$TT^{\dagger}y = y \text{ se } y \in R(T) ; \tag{1.1}$$

osservando poi che, su un complementare algebrico di $N(T)$ in X, T è 1-1, si può richiedere

$$T^{\dagger}Tx = x \text{ se } x \in M \text{ e } M \text{ è un complementare fissato di } N(T) \text{ in } X . \tag{1.2}$$

Le (1.1), (1.2) si possono riformulare usando una proiezione (·) P di X su $N(T)$ ed una proiezione Q di Y su $R(T)$:

(·) Per proiezione si intende sempre un operatore lineare idempotente.

(1.1') $\quad TT^{\dagger}y = Qy, \ \forall y \in R(T)$

(1.2') $\quad T^{\dagger}Tx = (I-P)x, \ \forall x \in M \quad$ se $M = N(P)$.

Queste considerazioni giustificano la

DEFINIZIONE 1.1. *Siano* X, Y *spazi vettoriali (reali o complessi)*, $T: X \longrightarrow Y$ *lineare o, brevemente,* $T \in \Lambda\ (X,Y)$.

Si dirà inversa generalizzata di T- *relativamente alla proiezione* P *di* X *su* $N(T)$ *ed alla proiezione* Q *di* Y *su* $R(T)$- *una* $T^{\dagger} = T^{\dagger}_{PQ} \in$ $\in \Lambda\ (Y,X)$ *tale che*

(1.3) $\quad$ a) $TT^{\dagger} = Q \qquad$ b) $T^{\dagger}T = I-P \qquad$ c) $T^{\dagger}TT^{\dagger} = T^{\dagger}$

E' facile osservare a questo proposito che, se T è biunivoca, l'unica proiezione P di X su $N(T)$ è la funzione nulla e l'unica proiezione di Y su $R(T)$ è l'identità di Y, sicché in tal caso $T^{\dagger} = T^{-1}$; in altre parole la richiesta α) precedente è certamente soddisfatta.

Quanto alla c) di (1.3), nella terminologia di NASHED e VOTRUBA in[2] essa si esprime dicendo che $T^{\dagger}$ è una 'inversa esterna' di T; si noti che la richiesta simmetrica che $T^{\dagger}$ sia una 'inversa interna' di T (cioè che valga l'equazione $TT^{\dagger}T = T$) è automaticamente soddisfatta da una inversa generalizzata.

Le richieste a, b, c individuano sempre una ed una sola $T^{\dagger} \in \Lambda(Y,X)$; l'esistenza di inverse generalizzate è allora una ovvia conseguenza dell'esistenza di complementari algebrici in uno spazio vettoriale; è questo il senso del fondamentale

TEOREMA 1.2. *Sia* $T \in \Lambda(X,Y)$. Se $P: X \xrightarrow{su} N(T)$, $Q: Y \xrightarrow{su} R(T)$ *sono proiezioni date, esiste una unica* $T^{\dagger}$, *inversa generalizzata di* T *ri* *spetto a* P, Q: *la si indicherà con* $T^{\dagger}_{PQ}$ *quando si voglia evitare ambigui tà.*

<u>Dimostrazione</u>. Si consideri il diagramma (commutativo)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "I-P"'] & Y \\ M=(I-P)(X) \arrow[r, "T/M", "\text{1-1, su}"'] & R(T) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

ove $\hookrightarrow$ indica immersione; se si inverte normalmente $T|_M$ e si scambiano proiezioni con immersioni, si ha

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, dashed, "T^{\dagger}"'] \arrow[d, "Q"] \\ M \arrow[u, hook, "j"] & R(T) \arrow[l, "(T|M)^{-1}"', "\text{1-1, su}"] \end{tikzcd} \qquad T^{\dagger} = j\circ(T|_M)^{-1}\circ Q$$

proviamo che $T^{\dagger}$ soddisfa a-c di 1.1.

a) Sia $y \in Y$; è $TT^{\dagger}y = Tj\,(T|M)^{-1}Qy$: quindi, se $Qy = Tx$ per $x \in M$ risulta $TT^{\dagger}y = Tx = Qy$.

b) Sia $x \in X$: è $T^{\dagger}Tx = T^{\dagger}T(x-Px) = j(T|_M)^{-1}T(x-Px) = j(x-Px) = x-Px$.

c) La c equivale ora a $T^{\dagger}Q = T^{\dagger}$, che è evidente dalla definizione di $T^{\dagger}$.

Resta ora da provare l'unicità. Siano $U, V \in \Lambda(Y,X)$ tali da soddisfare a-c della definizione: si ha subito

$$U = UTU = UQ = UTV = (1-P)V = VTV = V \quad \blacksquare$$

Molte proprietà dell'inversa generalizzata si deducono subito dalla definizione e dal teorema di unicità; ad esempio

i) $(c\,T)^{\dagger}_{PQ} = c^{-1}T^{\dagger}_{PQ}$ qualunque sia lo scalare $c \neq 0$;

ii) se T è su, $T^{\dagger}_{PQ}$ è una inversa destra per T;

se T è 1-1, $T^{\dagger}_{PQ}$ è una inversa sinistra per T
(in particolare se esiste T^{-1}, essa coincide con $T^{\dagger}_{PQ}$, come già si è osservato).

iii) Dalla definizione si ha subito $R(T^{\dagger}_{PQ}) = R(I-P)$ (se $x = (I-P)y$ è $x = T^{\dagger}_{PQ}(Ty)$; se $x = T^{\dagger}_{PQ}\, y$ è $x = T^{\dagger}_{PQ}\, Qy = T^{\dagger}_{PQ}\, Tu =$ $= (I-P)u$ per un certo $u \in X$). Pertanto una proiezione su $R(T^{\dagger}_{PQ})$ è $I-P$; poi $N(T^{\dagger}_{PQ}) = N(Q)$ (se $Qy = 0$ è $TT^{\dagger}_{PQ}y = 0$, $T^{\dagger}_{PQ}y \in N(T)$ e quindi $T^{\dagger}_{PQ}y \in R(P) \cap N(P) = \{0\}$; viceversa, da $T^{\dagger}_{PQ}y = 0$ segue $Qy = 0$) e quindi una proiezione su $N(T^{\dagger}_{PQ})$ è $I-Q$.

Si ha

$$(T^{\dagger}_{P,Q})^{\dagger}_{I-Q,I-P} = T$$

da a-c per unicità: per provare c si osservi che, in questo caso, essa coincide con $TT^{\dagger}T = T$, che si è già dimostrata.

iv) Il teorema di unicità afferma che le proiezioni P, Q individuano univocamente una inversa, ma è vero anche il viceversa: se $T^{\dagger}_{PQ} = T^{\dagger}_{P'Q'}$ è $P = P'$ e $Q = Q'$.

In effetti, sia $x \in X$: $Px - P'x = (I-P)x - (I-P')x =$ $= (T^{\dagger}_{PQ} - T^{\dagger}_{P'Q'})Tx = 0$; analogamente è $Qy - Q'y = 0 \ \forall y \in Y$.

E' facile caratterizzare l'insieme delle inverse generalizzate di una $T \in \Lambda(X,Y)$ fissata: si ha

<u>TEOREMA 1.3.</u> *L'insieme delle inverse generalizzate di* $T \in \Lambda(X,Y)$ *coincide con*

$$\{S;\ S \in \Lambda(Y,X),\ S \text{ è } \textit{inversa interna ed esterna di } T\}$$

<u>Dimostrazione</u>. Si è già provato che, se $T^{\dagger}_{PQ}$ è una inversa generalizzata di T (precisamente, quella relativa alle proiezioni P e Q) allora essa è in

versa interna ed esterna di T. Viceversa, S sia inversa interna ed esterna di T: basterà provare che TS ed ST sono idempotenti; in effetti
$(TS)^2 = TSTS = (TST)S = TS$ e
$(ST)^2 = STST = (STS)T = ST$
Dunque $S = T^{\dagger}_{I_X-ST,TS}$ ■

Infine, si può stabilire una formula per il 'cambiamento di proiezioni': più precisamente, vale il

TEOREMA 1.4. *Siano* P,P' *proiezioni su* $N(T)$, Q, Q' *proiezioni su* $R(T)$, *ove* $T \in \Lambda(X,Y)$ *è fissata.*
Allora

$$T^{\dagger}_{P'Q'} = (I-P')T^{\dagger}_{PQ}\,Q'$$

Dimostrazione. $(I-P')T^{\dagger}_{PQ}Q' = T^{\dagger}_{P'Q'}(TT^{\dagger}_{PQ}T)T^{\dagger}_{P'Q'} = T^{\dagger}_{P'Q'}TT^{\dagger}_{P'Q'} = T^{\dagger}_{P'Q'}$ ■

Alcuni esempi.

1) *Inversa generalizzata di una proiezione* .
Sia $P = P^2 \in \Lambda(X,X)$; si ha subito

$$P^{\dagger}_{I-P,P} = P.$$

2) *Inversa generalizzata di un funzionale lineare non nullo.*
Sia $f \in \Lambda(X,K)$, $f \neq 0$, ove K è il campo di X. $N(f)$ è un iperpiano di X, con complementari del tipo $\{\lambda x_0;\ \lambda \in K\}$ ove $x_0 \in X$ è tale che $f(x_0) = 1$; la relativa proiezione su $N(f)$ è $Px = x-f(x)x_0$ e d'altronde l'unica proiezione su $R(f) = K$ è l'identità.

E' facile allora vedere che risulta

$$f^{\dagger}_{P,I}(\lambda) = \lambda x_o \qquad \forall\, \lambda \in K\,.$$

3) *Inversa generalizzata di una matrice diagonale* .

Sia data una matrice diagonale n x n $\mathcal{T} = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ (che identificheremo con l'operatore T ad essa associato nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$); posto $\lambda^{\dagger}_j = 0$ se $\lambda_j = 0$, $\lambda^{\dagger}_j = \lambda^{-1}_j$ se $\lambda_j \neq 0$ si ha $\mathcal{T}^{\dagger} = \operatorname{diag}(\lambda^{\dagger}_1 \dots \dots \lambda^{\dagger}_n)$.

Infatti

$P = \mathcal{T}\mathcal{T}^{\dagger} = \operatorname{diag}(\lambda_1 \lambda^{\dagger}_1, \dots, \lambda_n \lambda^{\dagger}_n) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ con $\varepsilon_j = 0,1$ $\forall j$ a seconda che sia $\lambda_j = \lambda^{\dagger}_j = 0$ o $\lambda_j, \lambda^{\dagger}_j \neq 0$; P è idempotente e commuta con $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^{\dagger}$; inoltre $P\mathcal{T} = \mathcal{T}P = \mathcal{T}$ e quindi, valendo lo stesso per $\mathcal{T}^{\dagger}$,

$$\mathcal{T}\mathcal{T}^{\dagger}\mathcal{T} = \mathcal{T}P = \mathcal{T}, \quad \mathcal{T}^{\dagger}\mathcal{T}\mathcal{T}^{\dagger} = \mathcal{T}^{\dagger}P = \mathcal{T}^{\dagger};$$

$\mathcal{T}^{\dagger}$ é dunque una inversa generalizzata: P è poi autoaggiunta e quindi $\mathcal{T}^{\dagger}$ è relativa alle proiezioni ortogonali su $N(T)$, $R(T)$.

§ 2. INVERSIONE GENERALIZZATA NEGLI SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI

Nell'applicare la teoria dell'inversione generalizzata al caso di operatori tra spazi vettoriali topologici (brevemente, TVS(·))si incontrano due tipi di difficoltà:

a) la convenienza nel considerare operatori definiti non ovunque costringe a trattare l'inversione generalizzata di operatori T definiti su un sottospazio $\mathcal{D}(T)$ di X;

b) la convenienza di avere inverse generalizzate relative a proiezioni *continue* richiede che $N(T)$, $R(T)$ abbiano in X, Y *complementari topologici* nel senso della nota definizione.

(·) Si ammetterà implicitamente che la topologia di X sia localmente convessa e $\mathbb{T}_2$.

<u>DEFINIZIONE 2.1.</u> *Sia* X *un* TVS. *Un sottospazio* M *di* X *ha per complementare (topologico) un altro sottospazio* N *di* X *se*
α) X *è la somma diretta di* M *ed* N;
β) *le proiezioni di* X *su* M *e su* N *sono continue.*

Evidentemente, se M ha N per complementare è anche vero che N ha M per complementare (topologico): si parla semplicemente di coppie di sottospazi complementari per la topologia di X.

Mentre la a può essere superata, sia pure a prezzo di una notevole complicazione nelle definizioni, essenzialmente considerando inverse generalizzate di T quale elemento di Λ $(\mathcal{D}(T), Y)$ (queste estensioni saranno considerate nel seguito solo di sfuggita), la difficoltà b è assai più sostanziale: essa concerne in effetti l'esistenza di complementari topologici in un TVS X.

E' facile verificare anzitutto che *uno spazio* M *ha complemento topologico in* X *solo se* M *è chiuso in* X: ma questa condizione è ben lontana dall'essere sufficiente . Perfino in uno spazio di Banach (dove la situazione è abbastanza semplice: per il teorema del grafico chiuso, *se* M *è chiuso in* X *ed ha un complemento algebrico* N *chiuso, allora* M, N *sono complementari*) vi sono sottospazi chiusi senza complemento topologico, ed anzi questa è la situazione tipica degli spazi di Banach: è noto infatti [5] che *uno spazio di Banach in cui ogni sottospazio chiuso ha complementare topologico è isomorfo ad uno spazio di Hilbert*, cioè può essere rinormato equivalentemente con una norma discendente da un prodotto interno.

Questo tipo di difficoltà è risolta completamente solo negli Hilbert, dove ogni sottospazio chiuso ha per complementare topologico almeno il complemento ortogonale.

Resta poi da menzionare il fatto che anche nell'ambiente più favorevole, quello degli spazi di Hilbert, si richiede pur sempre che $N(T)$, $R(T)$ siano chiusi: se ciò è vero per $N(T)$ in casi assai generali (basta che T sia continuo, oppure chiuso), questa condizione è alquanto restrittiva per $R(T)$, ed obbliga a considerare inverse generalizzate definite non ovunque su Y.

Se si ammette per ipotesi che a-b siano soddisfatte l'inversione generalizzata è ancora possibile con risultati 'regolari' come mostra il seguente

TEOREMA 2.2. *X,Y siano Fréchet,* $T \in L(X,Y)$: *si supponga di più che* $N(T)$ *abbia complemento M in X (con relativa proiezione P da X su* $N(T)$ *continua) e* $R(T)$ *abbia complemento (topologico) S in Y con relativa proiezione Q continua: allora* $T^{\dagger}_{PQ}$ *è continua, cioè* $T^{\dagger}_{PQ} \in L(Y,X)$ (·)

Dimostrazione. Proveremo che $T^{\dagger}_{PQ}$ ha grafico chiuso: sia $y_n \in Y$; $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{Y} y$ e $T^{\dagger}_{PQ}\, y_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} z$: allora $z \in M$.

$Qy_n = TT^{\dagger}_{PQ}y_n \xrightarrow[n\to\infty]{Y} Tz$, da cui $Qy = Tz$, cioè $TT^{\dagger}_{PQ}y = Tz$, da cui

$T^{\dagger}_{PQ}\, TT^{\dagger}_{PQ}y = T^{\dagger}_{PQ}y = (I-P)z = z$. ∎

L'ipotesi su $R(T)$ è tuttavia assai forte: essa implica in particolare che T sia un omomorfismo e, del resto, da $R(T^{\dagger}_{PQ}) = M$ segue che, in questa situazione, tale è anche $T^{\dagger}_{PQ}$.

Per evitare le complicazioni dovute alla struttura dei sottospazi chiusi di un generico TVS X, considereremo spazi di Hilbert X, Y con prodotto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$: in essi ogni sottospazio chiuso ha per complemento topologico almeno il complemento ortogonale e $T \in L(X,Y)$ ha codominio chiuso $\Longleftrightarrow$ T è un omomorfismo; in un primo tempo, ci restringeremo a questo caso particolare per avere una teoria parallela a quella algebrica.

Dato il ruolo privilegiato che le proiezioni ortogonali occupano nella geometria degli spazi di Hilbert, considereremo ora inverse

---

(·) $L(Y,X)$ indica l'insieme degli operatori lineari continui definiti su Y ed a valori in X.

generalizzate relative ad esse: una inversa generalizzata di un omomorfismo $T \in L(X,Y)$ (X,Y Hilbert) si dice *inversa di Moore-Penrose* di T se è relativa alle proiezioni ortogonali su $N(T)$, $R(T)$; l'inversa di Moore-Penrose $T^\dagger$ gode delle seguenti proprietà:

$$(2.1) \qquad TT^\dagger T = T$$

$$(2.2) \qquad T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger$$

$$(2.3) \qquad (T^\dagger T)^* = T^\dagger T$$

$$(2.4) \qquad (TT^\dagger)^* = TT^\dagger$$

(2.3 e 2.4 seguono dal fatto che $T^\dagger T$, $TT^\dagger$ sono proiezioni ortogonali e quindi autoaggiunte). E' facile provare che 2.1-4 individuano univocamente $T^\dagger$: vale in effetti il

Teorema 2.3 (Penrose [4]). *Dato $T \in L(X,Y)$ omomorfismo* (X,Y Hilbert) *vi è al più un operatore $T^\dagger \in L(Y,X)$ che soddisfi* 2.1-4.

Dimostrazione. Da 2 e 4 segue, per un qualunque $T^\dagger$ che soddisfi 1-4

$$(2.5) \qquad T^\dagger = T^\dagger(TT^\dagger)^* = T^\dagger(T^\dagger)^* T^*$$

similmente da 3 e 2 si ha

$$(2.6) \qquad T^\dagger = (T^\dagger T)^* T^\dagger = T^* \; (T^\dagger)^* T^\dagger .$$

Da

$$(2.7) \qquad T = T\,T^\dagger T = (T^\dagger)^* T^* T$$

segue

(2.8) $T^* = T^* T T^\dagger$

Infine, da 1 e 3 si ottiene

(2.9) $T = T T^\dagger T = T T^* (T^\dagger)^*$

e quindi

(2.10) $T^* = T^\dagger T T^*$

Si abbiano allora due operatori U, V soddisfacenti 2.1-4; si ha

$$
\begin{aligned}
U &= UU^* T^* && \text{per } 5 \\
&= UU^* T^* TV = && \text{per } 8 \\
&= UTV = && \text{per } 7 \\
&= UTT^* V^* V = && \text{per } 9 \\
&= T^* V^* V = && \text{per } 10 \\
&= V && \text{per } 6 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Da questa definizione (data da PENROSE nel caso matrici) o come caso particolare di proprietà già viste, seguono varie formule 'di tipo inverso'.

$(T^\dagger)^\dagger = T;$

$(T^*)^\dagger = (T^\dagger)^*.$

Per provare una notevole proprietà di tipo variazionale dell'inversa di Moore-Penrose di un omomorfismo, introduciamo alcune definizioni.

DEFINIZIONI 2.4. *Sia* $T \in L(X,Y)$ *un omomorfismo.*
Si consideri l'equazione

$$(2.11) \qquad Tx = b$$

si dirà soluzione ai minimi quadrati di (2.11) *un* $x_0 \in X$ *tale che*

$$\| Tx_0 - b \| = \min \{\|Tx-b\| \; ; \; x \in X\}$$

cioè un minimo del funzionale $J(x) = \|Tx-b\|$ $(x \in X)$;
si dirà soluzione variazionale di (2.11) *una soluzione ai minimi quadrati di* (2.11) *che sia inoltre di norma minima.*

L'esistenza di soluzioni ai minimi quadrati per (2.11) segue dal

TEOREMA 2.5. *Siano* $T \in L(X,Y)$ *un omomorfismo,* $b \in Y$.
Sono equivalenti per $u \in X$:

i) *Se* Q *è la proiezione ortogonale su* $R(T)$, $Tu = Qb$;

ii) u *è soluzione ai minimi quadrati di* (2.11);

iii) $\quad T^*Tu = T^*b$.

Dimostrazione. i $\Rightarrow$ ii. Supponiamo $Tu = Qb$; allora $\forall x \in X$

$$J^2(x) = \langle Tx-b, Tx-b \rangle = \|Tx-Qb\|^2 + \|Qb-b\|^2 =$$

$$= \|Tx-Qb\|^2 + \|Tu-b\|^2 \geq J^2(u)$$

poiché $Tx-Qb \perp Qb-b$: quindi $J(u) = \min_{x \in X} J(x)$.

ii $\Rightarrow$ iii. Poiché $Qb = Tx$ per almeno un $x \in X$

$$\|Tu-b\|^2 = \|Tu-Qb\|^2 + \|Qb-b\|^2 \geq \|Tu-Qb\|^2 + \|b-Tx\|^2;$$

segue $Tu = Qb$ e quindi iii.

Infine, iii $\Rightarrow$ i: se vale iii, $T^*(Tu-b) = 0$, cioè $Tu-b \in N(T^*) = R(T)^{\perp}$ e quindi $0 = Q(Tu-b) = Tu-Qb$, cioè i. ■

Come si è accennato, il teorema ha per corollario ovvio l'esistenza di soluzioni ai minimi quadrati per (2.11) (qualunque sia $b \in Y$); non solo: potendosi caratterizzare l'insieme delle soluzioni ai minimi quadrati con

$$\Sigma = \{u; u \in X, \ T^*Tu = T^*b\}$$

che è chiuso e convesso, segue l'esistenza di un elemento (unico) di norma minima in Σ o, in altri termini: *Esiste una ed una sola soluzione variazionale di* (2.11) $\forall b \in Y$.

E' immediato verificare allora che:

Data l'equazione (2.11) *l'unica soluzione variazionale di essa è* $T^{\dagger}b$.

Infatti è $TT^{\dagger}b = Qb$ e quindi, per i del teorema, $T^{\dagger}b$ è soluzione ai minimi quadrati di (2.11); non solo, ma se

$$Tu = Qb\ ,$$

indicata con P la proiezione ortogonale su $N(T)$ si ha

$$\|u\|^2 = \|Pu\|^2 + \|(I-P)u\|^2 = \|Pu\|^2 + \|T^{\dagger}Tu\|^2 = \|Pu\|^2 + \|T^{\dagger}Qb\|^2 =$$

$$= \|Pu\|^2 + \|T^{\dagger}TT^{\dagger}b\|^2 = \|Pu\|^2 + \|T^{\dagger}b\|^2 \geq \|T^{\dagger}b\|^2,$$

sicché $T^{\dagger}b$ è la soluzione ai minimi quadrati di norma più piccola.

Questa notevole proprietà di $T^{\dagger}$ permette una definizione alternativa di essa: si può cioè porre $\forall\, b \in Y$
$T^{\dagger}b$ = (unica soluzione variazionale di $Tx = b$).

Sempre nel caso di una $T \in L(X,Y)$ a codominio chiuso, è possibile dare una notevole rappresentazione di $T^{\dagger}$ usando il (semi) gruppo generato da T^*T: questa formula, dovuta a Groetsch ed esposta in [3] insieme alla teoria elementare delle inverse generalizzate (cfr. la bibliografia ivi citata per il lavoro originale) può essere facilmente estesa ad operatori a codominio non chiuso [ibid. chapt. III].

Questa formula di rappresentazione si basa sul seguente

<u>TEOREMA 2.6.</u> *Siano* X,Y *Hilbert,* $T \in L(X,Y)$ *abbia codominio chiuso.*

Allora

i) $T^*T|_{R(T^*)}$ *è invertibile in una applicazione* $\bar{T}^{-1} \in L(R(T^*), R(T^*))$;

ii) $T^{\dagger} = (T^*T|_{R(T^*)})^{-1}\, T^* = \bar{T}^{-1}T^*$.

<u>Dimostrazione.</u> Sia $x \in R(T^*) = N(T)^{\perp}$: da $T^*Tx = 0$ segue $0 = \langle T^*Tx, y\rangle \quad \forall y \in X$ da cui $0 = \|Tx\|^2$, cioè $x \in N(T)$ e quindi $x = 0$.

Dunque $T^*T\colon R(T^*) \longrightarrow X$ è 1-1; poi $(T^*T)(R(T^*)) = R(T^*)$: se $y \in R(T^*)$ $y = T^*u = T^*T(T^{\dagger}u)$ per un $u \in Y$ (cfr. (2.8)) e $T^{\dagger}u \in N(T)^{\perp} = R(T^*)$ (si ricordi che, per un teorema di BANACH, $R(T^*)$ è chiuso).

Si ha quindi

$$T^*T\colon R(T^*) \xrightarrow[\text{su}]{\text{1-1}} R(T^*)$$

e quindi $(T^*T|_{R(T^*)})^{-1}$ è una applicazione lineare continua da $R(T^*)$ su $R(T^*)$; nel seguito si indicherà $T^*T|_{R(T^*)}$ con $\bar{T}$.

ii) E' ora evidente la correttezza della composizione $\bar{T}^{-1}T^* \in L(Y,X)$.

Per provare ii, se si ricorda che $R(T^{\dagger}) = N(T)^{\perp} = R(T^*)$, ba sta provare $T^*TT^\dagger = T^*$: ma essa non è altro che (2.8).■

Nel seguito, per impiegare risultati di teoria spettrale, si supporrà che X, Y siano Hilbert su $\mathbf{C}$. Per il teorema precedente lo spettro di $\bar{T}$, sia σ, è un compatto di $\mathbf{R}^+$ (perché $\bar{T}$ è evidentemente autoaggiunto, non negativo e $0 \notin \sigma$): la sua decomposizione in integrale spettrale

$$\bar{T} = T^*T_{|R(T^*)} = \int_\alpha^\beta \lambda \, d\, E(\lambda) \quad \text{(convergenza in norma degli operatori)}$$

($\sigma \subset]\alpha,\beta[\subset \mathbf{R}^+$) permette di definire $f(\bar{T})$ qualunque sia la funzione $f \in C(]\alpha,\beta[)$; di più, se $f_k \in C(]\alpha,\beta[)\ \forall k>0$ e $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} f$ unif. su $]\alpha,\beta[$,

$$f_k(\bar{T}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(\bar{T}) \text{ nella norma di } L(R(T^*), R(T^*)) .$$

Abbiamo ora tutti i presupposti per la dimostrazione del teorema di rappresentazione di Groetsch.

<u>TEOREMA 2.7</u> [3, p. 56]. *Siano* X,Y *Hilbert complessi*, $T \in L(X,Y)$ *abbia codominio chiuso.*

Sia data una famiglia di funzioni continue a valori reali $\{f_k\} \subseteq C(]\alpha,\beta[)$, $\sigma \subset]\alpha,\beta[\subset [\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}^+$ (σ = *spettro di* $T^*T|_{R(T^*)} = \bar{T}$); *si abbia* $f_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1/x$ *uniformemente per* $x \in]\alpha,\beta[$; *allora*

$$T^\dagger = \lim_{k\to+\infty} f_k(\bar{T})T^* \quad \textit{nella topologia di } L(Y,X)$$

e, di più

$$\text{(2.12)} \qquad \| f_k(\bar{T})T^* - T^\dagger \| \leq \sup_{x\in\sigma} |x f_k(x) - 1| \, \| T^\dagger \|$$

(le norme sono quelle naturali in $L(Y,X)$).

<u>**Dimostrazione**</u>. La prima affermazione segue subito dal fatto che $f_k(\bar{T}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \bar{T}^{-1}$ in $L(R(T^*), R(T^*))$ e dal teorema precedente.

Quanto alla seconda, si scriva (cfr. (2.8))

$$f_k(\bar{T})T^* - T^\dagger = (f_k(\bar{T})\bar{T} - I)T^\dagger$$

da cui

$$\| f_k(\bar{T})\, T^* - T^\dagger ;\ L(Y,X)\| \le \| f_k(\bar{T})\bar{T} - I;\ L(R(T^*), R(T^*))\| \, \|T^\dagger ; L(Y,X)\|$$

resta da valutare $\| f_k(\bar{T})\bar{T} - I\|$ (norma in $L(R(T^*), R(T^*))$).

Poiché $f_k(\bar{T})\bar{T} - I = g_k(\bar{T})$ se $g_k(x) = f_k(x)\cdot x - 1$, $x \in]\alpha,\beta[$ e g_k è a valori reali come f_k, $g_k(\bar{T})$ è autoaggiunto e perciò la norma da stimare non è che il raggio spettrale di $\bar{T}$ (cfr. e.g. [1, p. 331]); a sua volta il raggio spettrale è dato da $\sup_{x\in\sigma}|g_k(x)|$ perché $\sigma(g_k(\bar{T})) = g_k(\sigma)$ ([1, p. 351]) e quindi si ha la valutazione cercata. ■

Per utilizzare la stima (2.12) occorre valutare $\inf \sigma$: è facile vedere che esso è $\ge \|T^\dagger\|^{-2}$. In effetti, se $x \in R(T^*) = N(T)^\perp$ $\|x\|^2 = \|x - Px\|^2 = \|T^\dagger T x\|^2 \le \|T^\dagger\|^2 \, \|Tx\|^2 = \|T^\dagger\|^2 \langle Tx, Tx\rangle =$ $= \|T^\dagger\|^2 \langle \bar{T}x, x\rangle$, da cui $\langle \bar{T}x, x\rangle \ge \|T^\dagger\|^{-2} \|x\|^2$: di qui segue per noti risultati $\lambda \ge \|T^\dagger\|^{-2}$ $\forall \lambda \in \sigma$.

Infine, se si nota che $\int_0^k e^{-xu}du = \frac{1}{x}(1 - e^{-xk}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{x}$ uniformemente per k variante su un compatto di R^+ si ha, come caso particolare del teorema 2.7

TEOREMA (Groetsch [3]) 2.8. *Siano* X,Y *Hilbert complessi,* $T \in L(X,Y)$ *abbia codominio chiuso.*

Allora

$$T^\dagger = \int_0^{+\infty} e^{-u\bar{T}}\, T^* du = \int_0^{+\infty} e^{-uT^*T}\, T^* du \tag{2.13}$$

nella topologia di $L(Y,X)$.

Se si pone $T^\dagger(k) = \int_0^k e^{-uT^*T}\, T^*\, du$ *per* $k > 0$, *si ha la stima*

$$\|T^\dagger(k) - T^\dagger\| \le \|T^\dagger\| \exp(-k\|T^\dagger\|^{-2})$$

<u>Dimostrazione</u>. Basta applicare il teorema precedente, osservando che, posto $f_k(x) = \int_0^k e^{-xu} du$ si ha

$$x f_k(x) - 1 = -e^{-xk}$$

e che quindi, se $x \in \sigma$

$$|x f_k(x) - 1| = e^{-xk} \le \exp(-k\,\|T^\dagger\|^{-2}). \blacksquare$$

Accenniamo brevemente all'estensione al caso in cui $T \in L(X,Y)$ (X,Y Hilbert) non abbia necessariamente codominio chiuso.

In tal caso, la proiezione ortogonale $Q: Y \xrightarrow{su} \overline{R(T)}$ non ha codominio in $R(T)$, sicché non si può richiedere $TT^\dagger y = Qy\ \forall y \in Y$; si considera allora $Y_1 = R(T) \oplus R(T)^\perp$ ($\oplus$ indica somma diretta algebrica) che è denso in Y e si considera la $T^\dagger \in \Lambda(Y,X)$ determinata dalle proiezioni P (proiezione ortogonale su $N(T)$) e $Q|Y_1$.

Risulta che, in generale, $T^\dagger$ *è solo chiuso, ed è continuo* $\Longleftrightarrow R(T) = \overline{R(T)}$. La formula integrale (2.13) è ancora vera, ma solo per la convergenza forte: cioè in questa situazione

$$T^\dagger b = \int_0^{+\infty} e^{-uT^*T}\, T^* b\, du \quad \forall b \in D(T^\dagger) = R(T) \oplus R(T)^\perp.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] TAYLOR, A.E.: Introduction to Functional Analysis - New York, John Wiley & Sons, Inc. 1958, pp. XVI-423.

[2] NASHED, M.Z. et al.: Generalized Inverses and Applications- Proceedings of an Advanced Seminar Sponsored by the Mathematic Research Center, New York - San Francisco-London Academic Press 1976, pp. XIV-1054.

[3] GROETSCH, C.W.: Generalized Inverses of Linear Operators "Pure and Applied Mathematics" New York-Basel Marcel Dekker Inc. 1977, pp. 165.

[4] PENROSE, R.: "A Generalized Inverse for Matrices" Proc. Cambridge Phil. Soc. 51(1955), 406-413.

[5] LINDENSTRAUSS, J. e TZAFRIRI, L.: "On the Complemented Subspaces Problem" Israel Math. J. 9(1971), 263-269.

[6] MOORE E.H.: "On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix" (Abstract) Bull. Am. Math. Soc. 26(1920) 394-395.

Per una bibliografia estensiva si rimanda a [2].

II PARTE - APPLICAZIONI

INTRODUZIONE ALLA SECONDA PARTE

Ai fini della inversione generalizzata con continuità di un operatore T a dominio $\mathcal{D}(T) \subseteq X$ ed a valori in Y ciò che è essenziale non è la continuità di esso ma piuttosto la chiusura di $\mathcal{R}(T)$; in effetti - considerando X e Y spazi di Hilbert per evitare problemi riguardo alla esistenza di complementari topologici - si ha che, se T è chiuso con $\mathcal{R}(T)$ chiuso, esso ha inversa $T^{\dagger}$ continua, mentre si è visto che, nel caso di una $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ $T^{\dagger}$ è continua se e solo se $\mathcal{R}(T)$ è chiuso (parte I): questo perché la continuità di T può essere assunta senza restrizione della generalità, considerandolo come operatore su $\mathcal{D}(T)$ con la norma del grafico.

Di qui l'importanza di conoscere condizioni semplici che assicurino la chiusura di $\mathcal{R}(T)$ sotto ipotesi assai generali; anche se in genere l'ipotesi del codominio chiuso è assai pesante - ad esempio, un operatore compatto la soddisfa solo nel caso banale in cui è degenere - esiste una semplice diseguaglianza dovuta a J. PEETRE [2] che, opportunamente modificata, dà condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un codominio chiuso: la diseguaglianza si riferisce ad una situazione del tipo

$$\begin{tikzcd} & Z \\ X \arrow[ur, "\mathcal{J}"] \arrow[r, "T"] & Y \end{tikzcd}$$

ove T è un operatore da X ad Y ed X è immerso compattamente in un terzo spazio Z.

In questa seconda parte del seminario vengono esposti alcuni risultati, ottenuti in [1], che si riferiscono sia a diseguaglianze che assicurano, per un generico operatore T (non necessariamente definito ovunque), la chiusura del codominio R(T), con conseguente continuità dell'inversa generalizzata $T^{\dagger}$, sia alcune applicazioni di queste diseguaglianze ad operatori differenziali lineari: in particolare, l'applicazione dei criteri ottenuti a spazi di tipo ℓ^2 permette di trovare una inversa generalizzata continua per operatori tra spazi (hilbertiani) di funzioni, via l'isometria stabilita tra un Hilbert ed un ℓ^2 da un sistema ortonormale completo del primo.

§1. DISEGUAGLIANZE PER OPERATORI A CODOMINIO CHIUSO

Nel seguito ci si riferirà costantemente al diagramma

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ \uparrow\scriptstyle{cc} & & \\ X & \xrightarrow{T} & Y \end{array} \tag{1.0}$$

con X, Y, Z Banach, T operatore tra X ed Y con dominio $\mathcal{D}(T) \subsetneq X$ non necessariamente denso in X; $X \overset{cc}{\hookrightarrow} Z$ indica iniezione compatta di X in Z.

Il tipo di diseguaglianza introdotta da PEETRE è esemplificato dal seguente

TEOREMA 1.1. *Nella situazione di* (1.0) *siano* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, X,Y,Z *riflessivi; allora sono equivalenti*

i) $\mathcal{R}(T)$ *è chiuso e* $\mathcal{N}(T)$ *ha dimensione finita;*

ii) $\exists C>0$ tale che $\forall x \in X$

$$\|x;X\| \le C(\|Tx;\ Y\| + \|x;\ Z\|) \tag{1.1.1.}$$

Questo teorema è provato in [2] cui si rinvia per la dimostrazione.

Se $\mathcal{N}(T)$ non ha dimensione finita, la (1.2) non è dunque valida $\forall x \in X$: tenendo però presente che, dato un complementare topologico M di $\mathcal{N}(T)$ (ammesso che esista), $T|_M$ è 1-1, si ha che (1.2.1.) vale $\forall x \in M$ nella sola ipotesi che $\mathcal{R}(T)$ sia chiuso, e viceversa.

L'inversa generalizzata $T^\dagger$ di $T \in \mathcal{L}(X,\mathcal{R}(T))$ si può rappresentare facilmente nel caso in cui M sia un complemento *ortogonale* di $\mathcal{N}(T)$, nel senso della seguente

DEFINIZIONE 1.2. (vedi [3, p. 39]). *Sia* X *uno spazio di Banach* ;

se $N = \bar{N}$ *è un suo sottospazio chiuso, un complementare topologico* M *di* N *si dice un suo complemento ortogonale se, posto*

$$P_0 = \text{proiezione da } X \text{ su } N \text{ lungo } M$$

si ha $\forall x \in X$

(1.2.1.) $$\|x - P_0 x\| = \mathrm{dist}(x,N) = \inf\{\|x-y\|;\ y \in N\}$$

E' chiaro come questa definizione generalizzi il concetto di ortogonalità negli Hilbert; è da notare piuttosto che in un generico Banach, oltre ovviamente all'esistenza, può mancare anche l'unicità del complemento ortogonale: inoltre la relazione tra sottospazi chiusi così definita può non essere simmetrica (cfr. [3, p. 38 segg.] e la bibliografia citata).

Tuttavia, nel caso in cui vi sia un complemento ortogonale per $N(T)$ (sempre nella situazione del teorema 1.1.) è facile provare che l'inversa generalizzata $T^{+(\cdot)}$ di $T \in L(X,R(T))$ (cioè di T vista come applicazione su $R(T)$, supposto chiuso: se $R(T)$ oltre che chiuso, è dotato di complemento topologico, si potrebbe senz'altro studiare l'inversa generalizzata relativa a questa proiezione, con qualche complicazione però negli enunciati) è isometrica a

$$\hat{T} : X/N(T) \longrightarrow R(T) \quad , \ \hat{T} = \text{appl. quoziente di } T,$$

che è invertibile in senso ordinario.

Più esattamente, vale il seguente

TEOREMA 1.3. *Nelle ipotesi del teorema* 1.1., $N(T)$ *abbia complemento ortogonale* M *con relativa proiezione* P_0 (cfr. 1.2.).

(·) Si intende, rispetto alla proiezione ortogonale P_0 su $N(T)$ ed a $I_{R(T)}$.

Sono allora equivalenti:

a) $R(T)$ *è chiuso;*

b) $\forall x \in M$

(1.3.1.) $\|x;X\| \leq C\,(\|Tx;Y\| + \|x;Z\|)$

Infine, se vale a *oppure* b, *l'inversa generalizzata* $T^{\dagger}$ *di* $T \in L(X, R(T))$ *relativa a* P_0 *e* $I_{R(T)}$ *è isometrica a* $\hat{T}^{-1}$, *ove* $\hat{T}: X/N(T) \xrightarrow[su]{1-1} R(T)$ *è l'applicazione quoziente di* T; $T^{\dagger}$ *è su* M.

Come si accennava, non è però essenziale che T sia continuo, ai fini della sua inversione generalizzata in una $T^{\dagger} \in L(R(T),X)$: nel caso di un operatore chiuso (il cui nucleo è ancora chiuso) definito su un sottospazio $D(T)$ di X, si può considerare T come elemento di $L(D(T), Y)$ se su $D(T)$ si pone la norma del grafico ; essendo ancora applicabili al diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow & \\ X \hookleftarrow D(T) & \xrightarrow[T]{} & Y \end{array}$$

che è del tipo del diagramma (1.0), le ipotesi del teorema 1.1, si ha il

<u>TEOREMA 1.4.</u> *Siano* X,Y,Z *riflessivi,* T *sia un operatore chiuso da* X *a* Y *e, di più,* $N(T)$ *abbia complemento ortogonale* M *con proiezione* P_0 *come in* (1.2.1.). *Allora sono equivalenti:*

a) $R(T)$ *è chiuso in* Y;

b) $\exists\, C>0$ *tale che* $\forall u \in M \cap D(T)$

(1.4.1.) $\|u;X\| \leq C\,(\|Tu; Y\| + \|u; Z\|)$

Infine se, nelle ipotesi precedenti, $R(T)$ è chiuso in Y con complemento topologico e relativa proiezione Q su di sé, allora esiste una unica $T^{\dagger} \in L(Y,X)$ a valori in $\mathcal{D}(T) \cap M$ tale che:

i) $\forall y \in Y,\ TT^{\dagger}y = Qy$;

ii) $\forall x \in \mathcal{D}(T),\ T^{\dagger}Tx = x - P_o x$;

iii) $T^{\dagger}TT^{\dagger} = T^{\dagger}$.

E' chiaro che come caso particolare di 1.4 e di 1.3 vi è quello in cui X è Hilbert: la proiezione ortogonale su $N(T)$ è allora la P_o della definizione 1.2 e quindi l'ipotesi che $N(T)$ abbia un complemento ortogonale è automaticamente soddisfatta.

§2. APPLICAZIONI

2.1. Inversione generalizzata di un operatore uniformemente ellittico.

Siano: Ω un aperto limitato di R^n, $p^{-1}+q^{-1} = 1$ con $p, q \in]1,+\infty[$, $H^1(\Omega)$ lo spazio di Sobolev $\{f;\ f \in L^2(\Omega),\ D_j f \in L^2(\Omega) \forall j=1\ldots n\}$ (·).

Si consideri il diagramma

$$\begin{tikzcd} & L^q(\Omega) & \\ H^1(\Omega) \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "T_p"] & & L^p(\Omega) \end{tikzcd}$$

(l'immersione è compatta se $n > 2$ e $1<q<\frac{2n}{n-2}$ oppure se $n = 2$ e $1<q<+\infty$, per il teorema di Rellich-Kondrashev),

ove T_p è l'operatore $-\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}(\cdot)D_i) + c(\cdot)$ $(a_{ij} \in C^{(1)}(\bar{\Omega}),\ c \in L^{\infty}(\Omega))$ definito sul suo dominio massimo

$$\mathcal{D}(T_p) = \{\phi \in H^1(\Omega);\ T_p\phi \in L^p(\Omega)\}.$$

Si supponga ora che:

(·) Le derivazioni si intendono sempre nel senso debole.

(2.1.1.) la forma sesquilineare A associata a T_p, cioè

$$A(f,g) = \int_\Omega [\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_i f(x)\overline{D_j g(x)} + c(x)f(x)\overline{g(x)}]\,dx, \quad f,g\in H^1(\Omega)$$

sia coerciva, cioè $\exists k > 0$ tale che $\forall f \in H^1(\Omega)$

$$A(f,f) \geq k \,\| f;\, H^1(\Omega)\|^2$$

il che ad esempio accade se la parte principale di T_p è unif. ellittica ed $\exists c_1 > 0$ tale che $c(x) \geq c_1$ q.d. su Ω.

Allora, usando la (1.4.1.) si può provare che l'operatore chiuso T_p ha codominio chiuso e successivamente (nelle ipotesi aggiuntive che sia $k > 1/4$- ove k è la costante di coercività di (2.1.1.) - e $|p-2|$ suff. piccolo) si ha la seguente stima per la norma dell'inversa generalizzata $T_p^\dagger$ (T_p è visto come elemento di $\mathcal{L}(\mathcal{D}(T_p), \mathcal{R}(T_p))$):

$$\| T_p^\dagger;\, \mathcal{L}(\mathcal{R}(T_p), H^1(\Omega))\| \leq (\sqrt{4k} - \| j_q;\, \mathcal{L}(H^1(\Omega), L^q(\Omega))\|)^{-1}$$

dove j_q è l'immersione compatta $H^1(\Omega) \subset\subset\!\to L^q(\Omega)$.

2.2. Chiusura del codominio di operatori tra spazi ℓ^2

Sia $A \subseteq Z^r$ infinito e, dati $a, \mu: A \longrightarrow \mathbf{C}$, $f: A \longrightarrow A$, si consideri $\mu a: A \longrightarrow \mathbf{C}$ definita da $(\mu a)(n) = \mu_n \cdot a_{f(n)}$ $\forall n \in A$: è allora assegnato un operatore chiuso $\bar{\mu}$ di dominio

$$\mathcal{D}(\bar{\mu}) = \{a \in \ell^2(A);\ \mu a \in \ell^2(A)\}$$

definito da

$$\bar{\mu}(a) = \mu a \qquad \forall\, a \in \mathcal{D}(\bar{\mu}).$$

Se $R \in f(A)$, si ponga

$$M_R = \sum |\mu_n|^2$$

con somma estesa a tutti e soli gli $n \in A$ tali che $f(n) = R$; nel seguito si supporrà che sia sempre

$$(2.2.1.) \qquad M_R < +\infty \qquad \forall R \in f(A).$$

La (2.2.1.) garantisce in particolare che ogni successione a supporto (·) finito in A appartiene a $\mathcal{D}(\bar{\mu})$ che è quindi denso in A.

Se ora si introduce lo spazio $\ell^{2,\alpha}(A) = \{a; a: A \longrightarrow \mathbf{C},$ $\sum_{n \in A} (1+n^2)^{-\alpha} |a_n|^2 = \|a; \ell^{2,\alpha}(A)\|^2 < +\infty\}$, 'pesato' col vettore $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_r)$ a componenti tutte positive, si ha un diagramma del tipo 1.0:

$$\begin{tikzcd} & \ell^{2,\alpha} \arrow[dr, dotted] & \\ \ell^2 \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "\bar{\mu}"'] & & \ell^2 \end{tikzcd}$$

e quindi si può applicare il teorema 1.4: perché valga la diseguaglianza di Peetre (1.4.1.) è in questo caso necessario e sufficiente che sia

$$M_R \geq c > 0 \quad \forall R \in f(\operatorname{supp} \mu),$$

sicché, nell'ipotesi (2.2.1.), $\bar{\mu}$ ha codominio chiuso se e solo se

$$(2.2.2.) \qquad \inf \{M_R;\ R \in f(\operatorname{supp} \mu)\} > 0 ;$$

se la (2.2.2.) è valida, l'operatore $\bar{\mu}$ ha allora (come elemento di $L(\mathcal{D}(\bar{\mu}), Y)$) inversa di Moore-Penrose.

(·) Se μ è una successione in A, è $\operatorname{supp} \mu = \{j \in A,\ \mu_j \neq 0\}$.

Questi risultati si possono estendere a spazi di funzioni che abbiano basi ortonormali indicizzate da A, a causa dell'isometria con $\ell^2(A)$ data dal teorema di Riesz-Fischer.

2.2A. Se $\{H_n; n \in N_o\}$ è il sistema delle funzioni di Hermite, normalizzate (cioè $\| H_n; L^2(\mathbf{R}) \| = 1 \ \forall n \in N_o$) e si pone, per $\alpha \in N_o^r$

$$H_\alpha = H_{\alpha_1} \otimes H_{\alpha_2} \otimes \ldots \otimes H_{\alpha_r}$$

allora $\{H_\alpha; \alpha \in N_o^r\}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbf{R}^r)$; l'isometria è in questo caso tra $\ell^2(N_o^r)$ e $L^2(\mathbf{R}^r)$ ed è espressa da

$$(a_\alpha)_{\alpha \in N_o^r} \longleftrightarrow \sum_{\alpha \in N_o^r} a_\alpha H_\alpha .$$

Per evitare complicazioni puramente formali, consideriamo in particolare il caso r = 1; dalle note formule

$$(D-x)H_n(x) = -\sqrt{2n+2}\ H_{n+1}(x) \qquad n \geq 0$$

$$(D+x)H_n(x) = \sqrt{2n}\ H_{n-1}(x) \qquad n \geq 1\ ((D+x)H_o(x) = 0)$$

segue che l'operatore

$$p(x,D) = (D-x)^h (D+x)^k \quad (h,k \in N)$$

definito su

$$\mathcal{D}(p) = \{f \in L^2(\mathbf{R});\ p(x,D)\ f \in L^2(\mathbf{R})\}$$

induce sui coefficienti di Hermite di $f \in L^2(\mathbf{R})$ una trasformazione del tipo della $\bar{\mu}$ già studiata: il dominio dell'operatore trasformato è

$$\mathcal{D}(\bar{\mu}) = \{(a_n)_{n \in N_0};\ p(x,D) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{H}_n \in L^2(\mathbf{R})\}$$

e, potendo eseguire i calcoli in $\mathcal{S}'$ - ove ogni distribuzione è ancora sviluppabile in serie di Hermite, le funzioni di L^2 essendo ancora caratterizzate dall'avere coefficienti di classe $\ell^2(N_0)$ - è facile vedere che questo è ancora il dominio massimo dell'operatore; l'operatore $\bar{\mu}$ soddisfa alla condizione $M_k \geq C > 0$ $\forall k \in f(\mathrm{supp}\ \mu)$ e quindi ha codominio chiuso: lo stesso vale allora per $p(x,D)$ che ha dunque inversa di Moore-Penrose continua.

L'estensione di questo risultato ad un operatore del tipo

$$(D_1-x_1)^{h(1)}\ (D_1+x_1)^{k(1)} \ldots\ (D_r-x_r)^{h(r)}(D_r+x_r)^{k(r)}$$

definito sul suo dominio massimo in $L^2(\mathbf{R}^r)$ $(h(1),\ldots,k(r) \in N_0)$ comporta complicazioni esclusivamente quanto alla notazione.

2.2B. Se $(\ell_1 \ldots \ell_r) = \ell$ è un vettore a componenti positive, si consideri

$$L^2_\ell = \{f \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^r);\ f \text{ è periodica di periodo } 2\pi/\ell_i \text{ in } x_i\ \forall\ i = 1\ldots r\}.$$

con la norma naturale

$$\| f;\ L^2_\ell \|^2 = \int_0^{2\pi/\ell_1} \cdots \int_0^{2\pi/\ell_r} |f(x)|^2 dx_1 \ldots dx_r;$$

un sistema ortonormale completo per L^2_ℓ è

$$\{f_\alpha;\ \alpha \in Z^r\},\ f_\alpha(x) = (\ell_1 \ldots \ell_r)^{1/2}(2\pi)^{-r/2} \exp(i \sum_{j=1}^{r} \ell_j\ \alpha_j\ x_j)$$

($x \in \mathbf{R}^r$) sicché ogni $f \in L^2_\ell$ è sviluppabile in serie di Fourier con coef_
ficienti di classe $\ell^2(Z^r)$: ancora, ogni distribuzione temperata periodica (di periodi $2\pi/\ell_1,\dots,2\pi/\ell_r$) è sviluppabile in serie di Fourier con coefficienti a crescita polinomiale, e le funzioni di L^2_ℓ si caratterizzano tra le distribuzioni periodiche per avere coefficienti nella classe indicata.

Ma allora l'operatore dato formalmente da

$$Qf = \exp(i < \ell\beta, \cdot>)\, D^\gamma \qquad \ell\beta = (\ell_1\beta_1,\dots\ell_r\beta_r) \qquad (\beta \in Z^r,\ \gamma \in N_0^r)$$

definito su

$$\mathcal{D}(Q) = \{f \in L^2_\ell;\ Qf \in L^2_\ell\}$$

è, a meno di una isometria, del tipo già visto, poiché

$$Qf_\alpha = (i\ell\alpha)^\gamma\, f_{\alpha+\beta}$$

(più esattamente è del tipo detto con $\mu_\alpha = (i\ell(\alpha-\beta))^\gamma$, $f(\alpha) = \alpha-\beta$); poiché se $\mu_\alpha \neq 0$ si ha $|\mu_\alpha| \geq \ell^\gamma$, la condizione per la chiusura del codominio è soddisfatta e dunque Q ha inversa di Moore-Penrose continua.

BIBLIOGRAFIA

[1] PLAZZI, P., "Su certi omomorfismi tra spazi di Banach" accettato per la pubblicazione in Atti del Seminario Mat. e Fisico dell'Università di Modena.

[2] PEETRE, J., "Another Approach to Elliptic Boundary Problems" Comm. Pure Appl. Math. 14(1961), 711-731.

[3] NASHED, M.Z. et al.; Generalized Inverses and Applications, Proceedings of an Advanced Seminar Sponsored by the Mathematics Research Center, New-York - San Francisco-London,Academic Press 1976 pp. XIV--1054.